7. MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE MODELOS DE PL

Resolver um PPL significa encontrar valores de x_j que resolvam o sistema de equações lineares que representa as restrições do modelo, incluindo as restrições de não negatividade, e ao mesmo tempo encontrar o maior ou menor valor para a função objetivo, caso se queira maximizar ou minimizar, respectivamente.

Alguns métodos de solução de um PPL:

<u>Métodos geométricos</u>: Solução gráfica (viável para problemas com até duas variáveis)

<u>Métodos analíticos</u>: Algoritmos de solução analítica:

- Simplex (DANTZIG, 1947)
- Elipsóides (KACHGAN, 1972)
- Pontos interiores (KAMARCAR, 1984)

7.1 – O método gráfico de solução

Esta metodologia se aplica quando se tem duas variáveis de decisão. Todavia, ela é útil para ilustrar visualmente, certos pontos da PL.

Noções básicas:

1) Hiperplano

É o conjunto de pontos do R^n que satisfaz:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b_i$$

A partir desta definição, tem-se:

a) $n = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1x_1 = b_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = b_1/ a_1\,, \quad a_1 \neq 0$

Exemplo: $2x_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2{,}5$

b) $n = 2 \quad \Rightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 = b_2$ (uma reta)

Exemplo: $2x_1 + 3x_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 – (2/3)x_1$

$x_1 = 3 – (3/2)x_2$

x_1	x_2
0	2
3	0

x_1	x_2
0	2
3	0

$n = 3 \quad \Rightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_3$ (um plano)

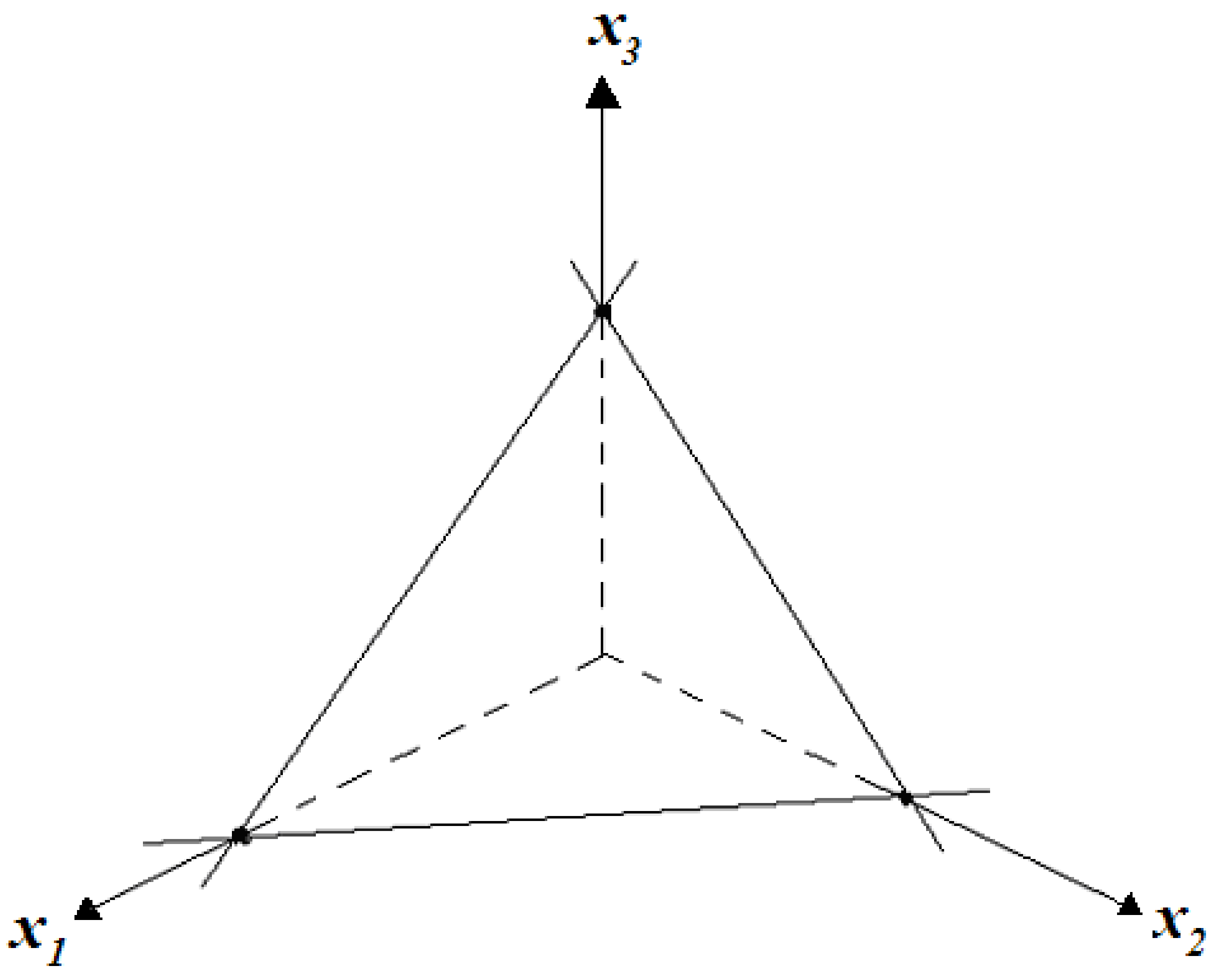
Exemplo: $4x_1 + 4x_2 + 2\,x_3 = 8$

$x_3 = 4 - 2x_2 - 2x_1$

$x_2 = 2 - (1/2)x_3 - x_1$

$x_1 = 2 - (1/2)x_3 - x_2$

x_1	x_2	x_3
0	0	4
0	2	0
2	0	0



$n \geq 4$ (Hiperplano)

2) Um hiperplano divide o espaço R^n em dois semi-espaços:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b_i$ (1° semi-espaço)

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b_i$ (2° semi-espaço)

Exemplo:

$2x_1 + 3x_2 \geq 6$ 1° semiplano A

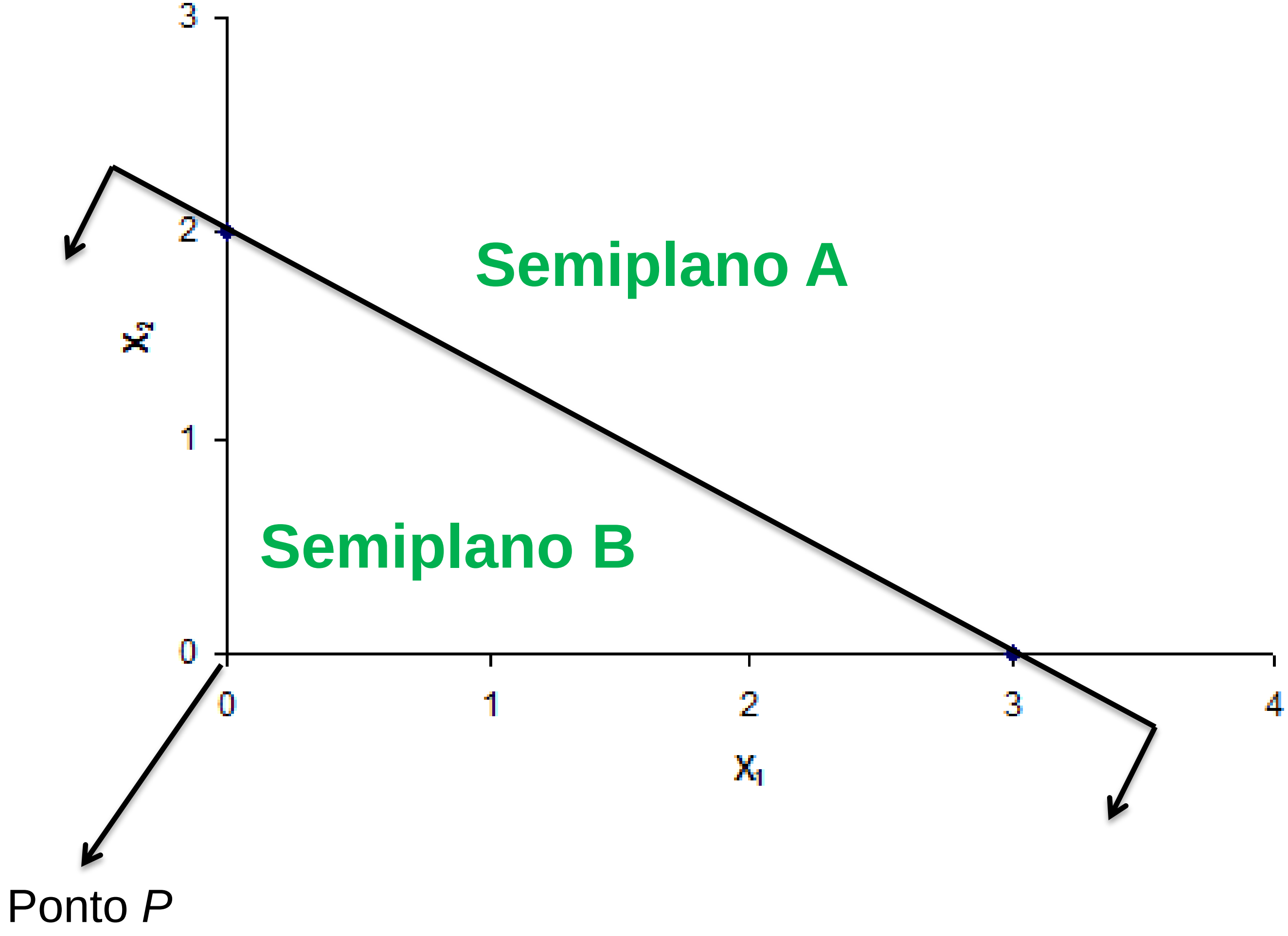
$2x_1 + 3x_2 \leq 6$ 2° semiplano B

Para descobrir qual é o semiplano *A* e qual é o *B*, pega-se um ponto que com certeza pertence a um deles.

A inequação que for atendida pelas coordenadas deste ponto será a associada ao semiplano correspondente.

Tomemos o ponto $P = (0,0)$. Como o ponto *P* satisfaz à inequação $2x_1 + 3x_2 \leq 6$, então esta se associa ao semi-plano que contém o ponto *P*. A Figura a seguir ilustra esta situação.

O ponto *P* satisfaz à inequação $2x_1 + 3x_2 \leq 6$



Resolvendo um problema de PL pelo M.G.

Considere o PPL:

$$Max\ Q(x) = 2x_1 + x_2$$

s.a.

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad (R_1)$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15 \quad (R_2)$$

$$2x_1 - 5x_2 \leq 6 \quad (R_3)$$

$$x_1 \geq 0 \ (R_4) \quad e \quad x_2 \geq 0 \ (R_5)$$

Solução:

$R_1 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 \leq 4$

O hiperplano (Reta) associado é $-x_1 + 2x_2 = 4$

x_1	x_2
0	2
- 4	0

$R_2 \Rightarrow 3x_1 + 5x_2 \leq 15$

O hiperplano (Reta) associado é $3x_1 + 5x_2 = 15$

x_1	x_2
0	2
- 4	0

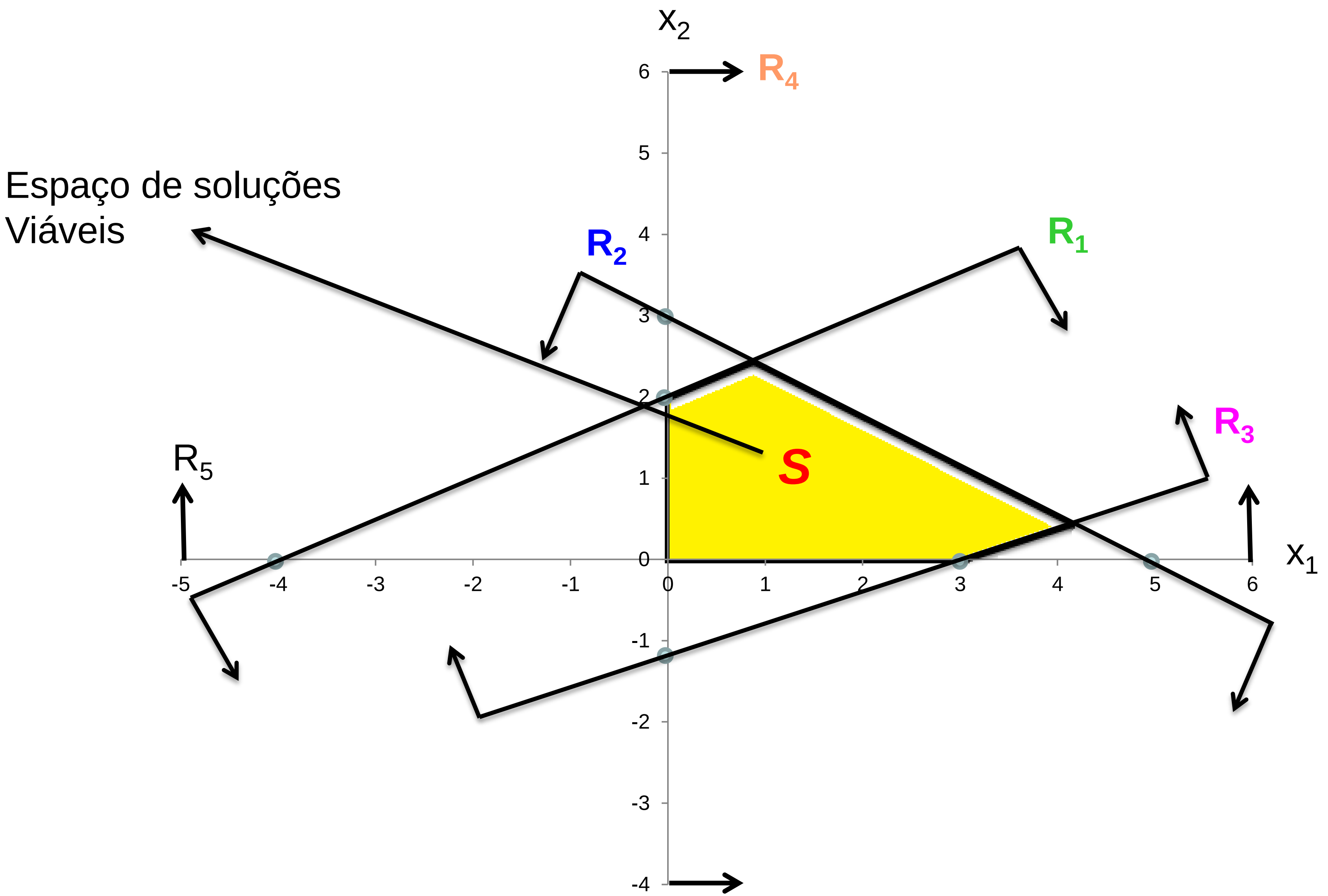
$R_3 \Rightarrow 2x_1 - 5x_2 \leq 6$

O hiperplano (Reta) associado é $2x_1 - 5x_2 = 6$

x_1	x_2
0	3
5	0

$R_4 \Rightarrow x_1 \geq 0$, com a reta $x_1 = 0$ que é o eixo vertical, ou seja, $P(1,0)$. Este satisfaz $x_1 \geq 0$, logo o semi-espaço está definido.

$R_5 \Rightarrow x_2 \geq 0$, com a reta $x_2 = 0$ que é o eixo horizontal, ou seja, $P(0,1)$. Este satisfaz $x_2 \geq 0$.



Espaço de soluções
Viáveis
x_2
R_4
R_2
R_1
R_3
R_5
S
x_1
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

A Figura anterior mostra o conjunto das soluções viáveis (*S*) definido pelas restrições ora apresentadas.

Qual o ponto de *S* que maximiza *Q(x)*?

Para responder a esta questão, é apresentado o conceito de curva de nível.

Uma curva de nível de *f* é formada por pontos de seu domínio que tem a mesma imagem. Assim, se X^A e X^B pertencem à uma mesma curva de nível, então $f(X^A) = f(X^B)$.

Para exemplificar esta situação, considere a função objetivo do PPL proposto:

$$Q(x) = 2x_1 + x_2$$

Para identificar uma curva de nível na função considere:

$Q(x)$	$2x_1 + x_2 = Q(x)$
- 4	$2x_1 + x_2 = -4$
0	$2x_1 + x_2 = 0$
6	$2x_1 + x_2 = 6$

$$2x_1 + x_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= -4 - 2x_1 \\ x_1 &= -2 - (1/2)x_2 \end{aligned}$$

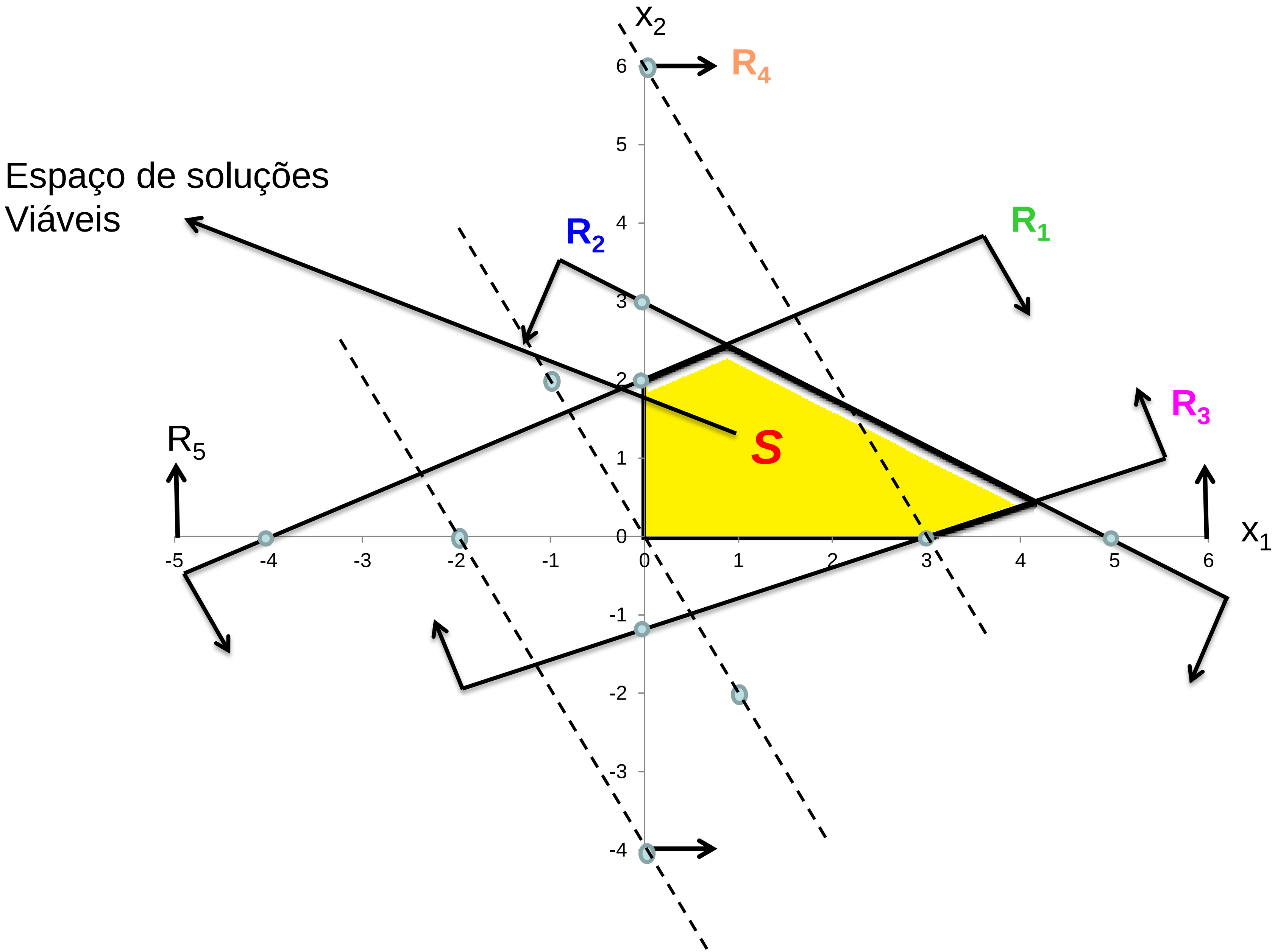
x_1	x_2
0	- 4
- 2	0

$$2x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= -2x_1 \\ x_1 &= -(1/2)x_2 \end{aligned}$$

x_1	x_2
1	- 2
- 1	2

$$2x_1 + x_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= 6 - 2x_1 \\ x_1 &= 3 - (1/2)x_2 \end{aligned}$$

x_1	x_2
0	6
3	0



Espaço de soluções
Viáveis
x_2
x_1
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
S
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

- Para as curvas de nível apresentadas na figura anterior, procura-se aquela com o maior valor para *Q(x)* e que ainda tenha ponto em *S*.

- Este ponto ou estes pontos constituem a solução ótima do PPL, no caso *X**.

- Para determinar a direção em que a curva de nível deve caminhar, pode-se lançar mão do cálculo de derivadas direcionais, obtendo-se o vetor gradiente.

- ✓ O vetor das derivadas parciais é denominado <u>vetor gradiente</u> e indicado por:

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

- ✓ O vetor gradiente indica a direção e o sentido nos quais a função terá a taxa máxima de variação.

- ✓ Se, entretanto, o objetivo for minimizar a função, deve-se tomar o sentido contrário do vetor gradiente.

Considerando que o PPL em análise apresenta a seguinte função de maximização:

$$Max\ Q(x) = 2x_1 + x_2$$

a direção e o sentido no qual a variação da função objetivo será máxima a partir de um determinado ponto são dados por:

$$\nabla f\left(x_1, x_2\right)$$

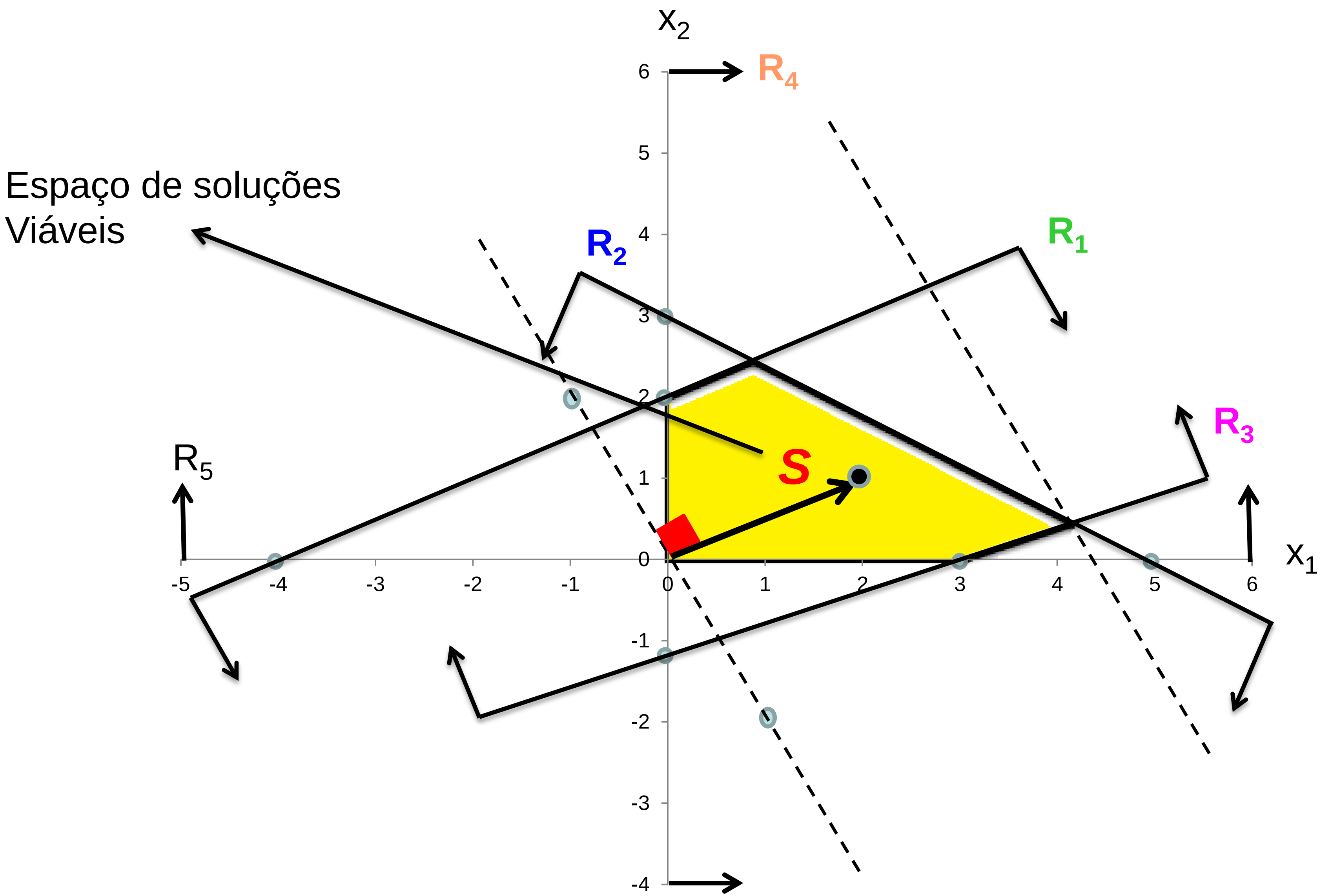
Considerando que este ponto seja o vetor (0, 0), tem-se:

$$\nabla f(0,0) = \left(f_{x_1}(0,0), f_{x_2}(0,0) \right) = (2,1)$$

- Deve-se observar que as curvas de nível são perpendiculares ao vetor gradiente.

- Como a função objetivo é uma função de maximização, o valor máximo para a função será a interseção da curva de nível com o último ponto de *S* no sentido de crescimento do vetor gradiente.

- **Chamaremos este ponto de *X**.**



x_2
R_4
Espaço de soluções
Viáveis
R_2
R_1
R_3
R_5
S
x_1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

O ponto *X** está na interseção das retas associadas às restrições R_2 e R_3. Para determinar este ponto, basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ 2x_1 - 5x_2 = 06 \end{cases} \Rightarrow \quad X^* = \left(\frac{21}{5}, \frac{12}{25} \right) = (4{,}20;\, 0{,}48)$$

Assim, o valor máximo obtido para a função *Q(x)* será:

$$Q(x^*) = 2\left(\frac{21}{5}\right) + \left(\frac{12}{25}\right) = \frac{222}{25} = 8{,}88$$

Casos especiais na solução gráfica:

Considere o modelo apresentado por Goldbarg e Luna (2000):

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.

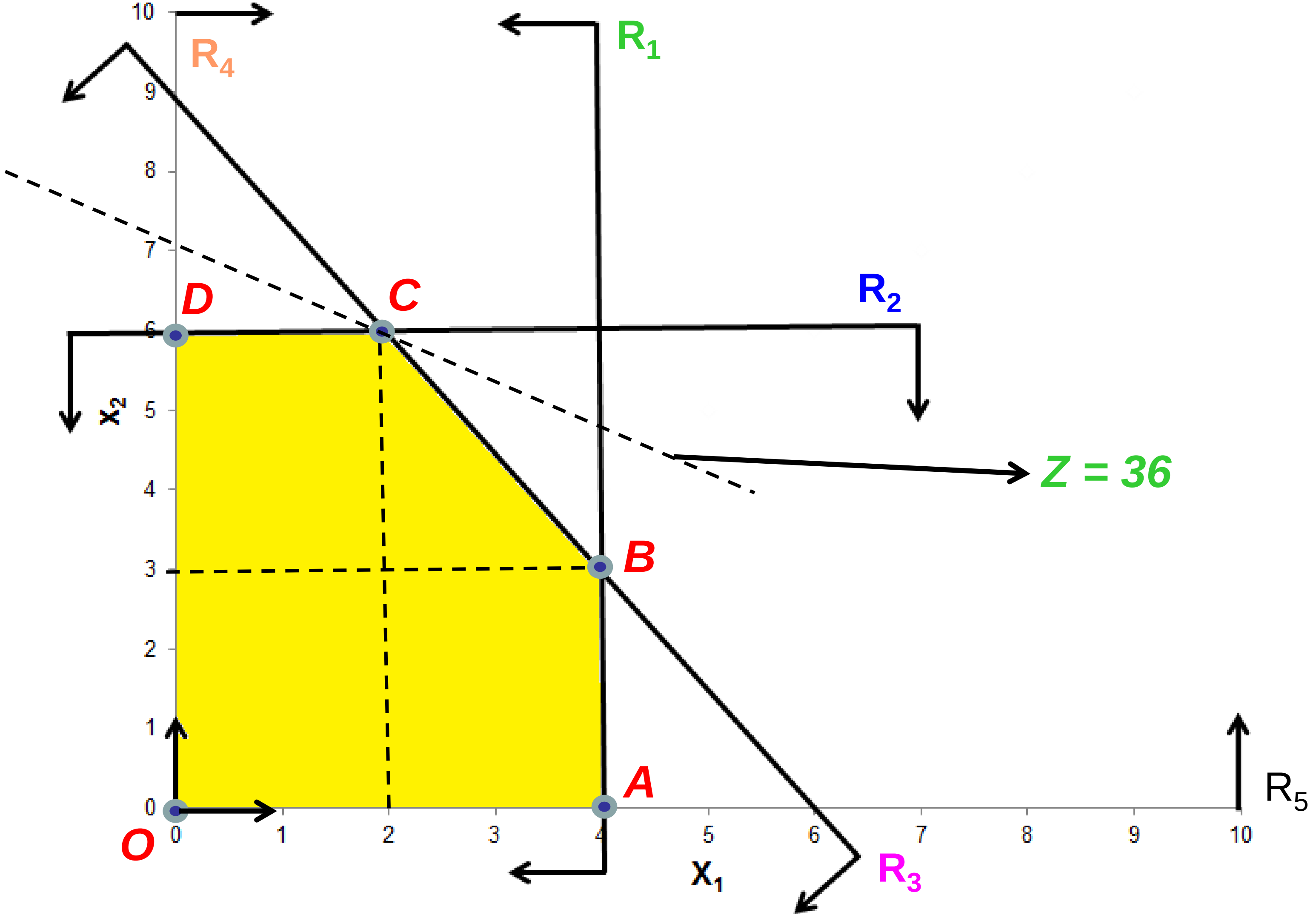
$$x_1 \leq 4 \quad (R_1)$$

$$x_2 \leq 6 \quad (R_2)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad (R_3)$$

$$x_1 \geq 0\ (R_4) \quad e \quad x_2 \geq 0\ (R_5)$$

O modelo anterior apresenta a seguinte solução:



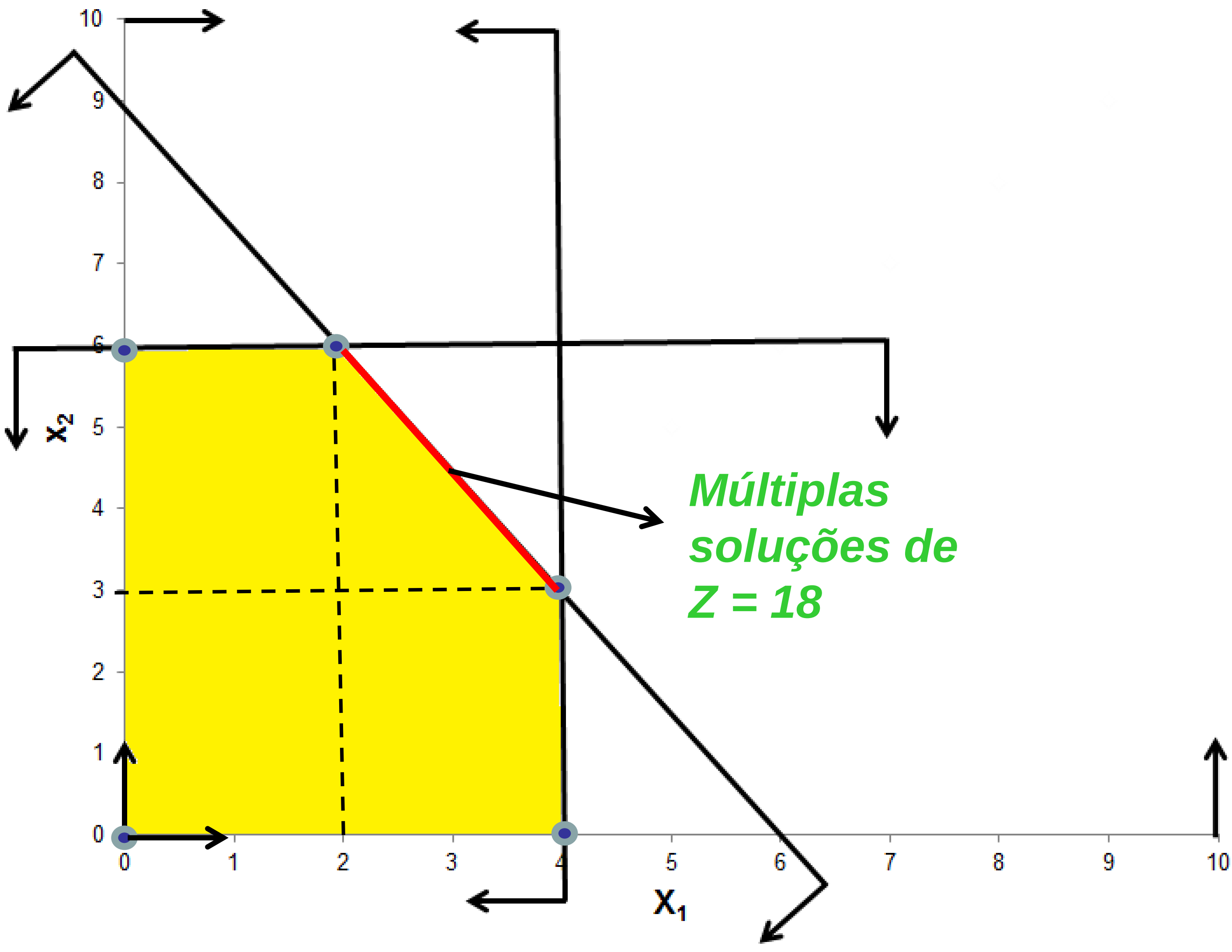
Admitindo que a solução ótima vai estar em um dos pontos extremos da figura convexa, temos que:

Pontos examinados	**Coordenadas (x_1, x_2)**	**Valor da função $Z = 3x_1 + 5x_2$**
O	**(0, 0)**	**0**
A	**(4, 0)**	**12**
B	**(4, 3)**	**27**
C*	**(2, 6)**	**36***
D	**(0, 6)**	**30**

A solução anteriormente apresentada é única, sendo o valor máximo de *Z* igual a 36.

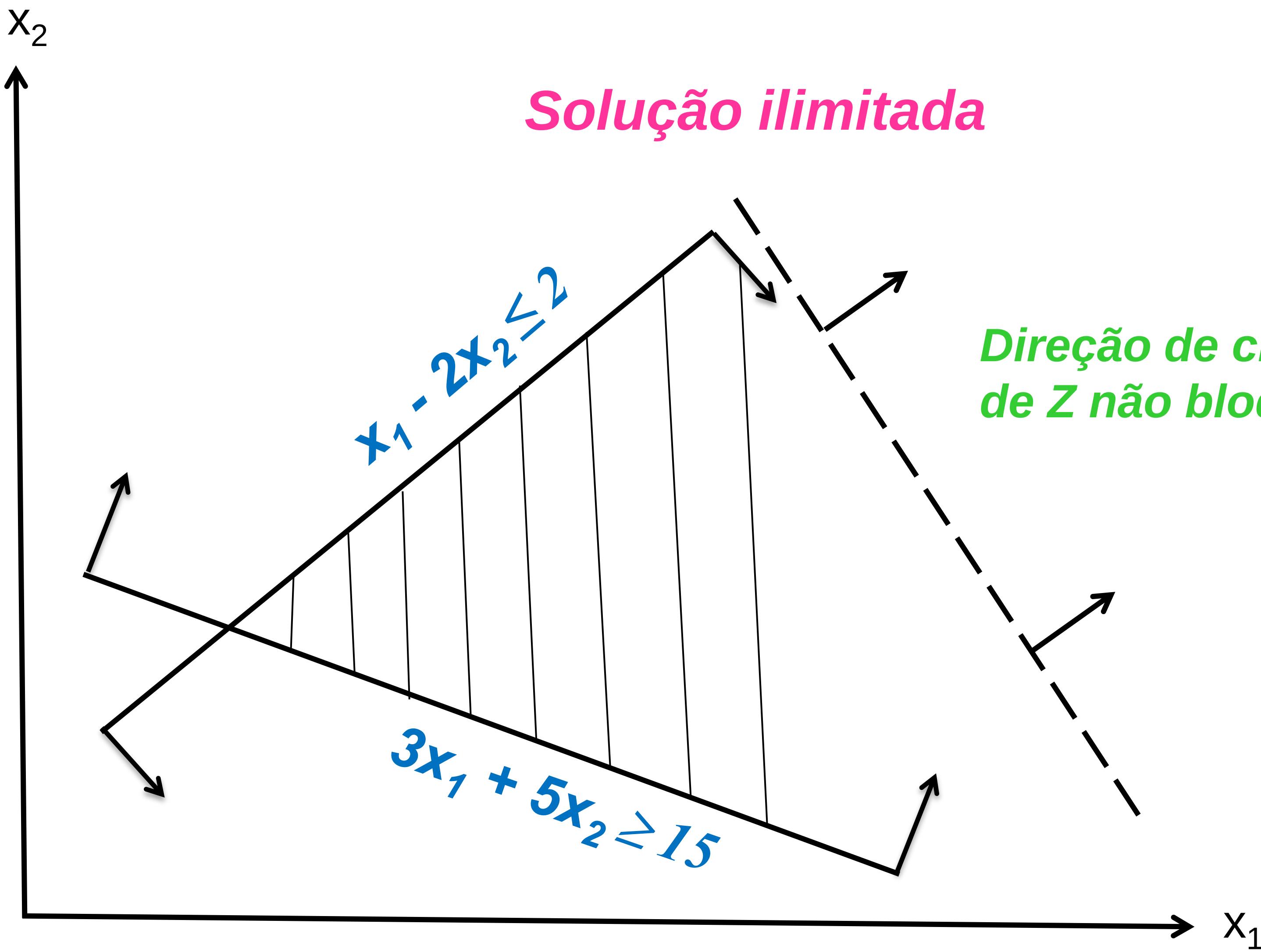
Considere agora que, para o mesmo modelo apresentado, a função objetivo seja a seguinte: Z = $3x_1 + 2x_2$. Neste caso nós teríamos a função objetivo com a mesma inclinação da restrição 3, produzindo assim múltiplas soluções ótimas (veja a seguir).

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

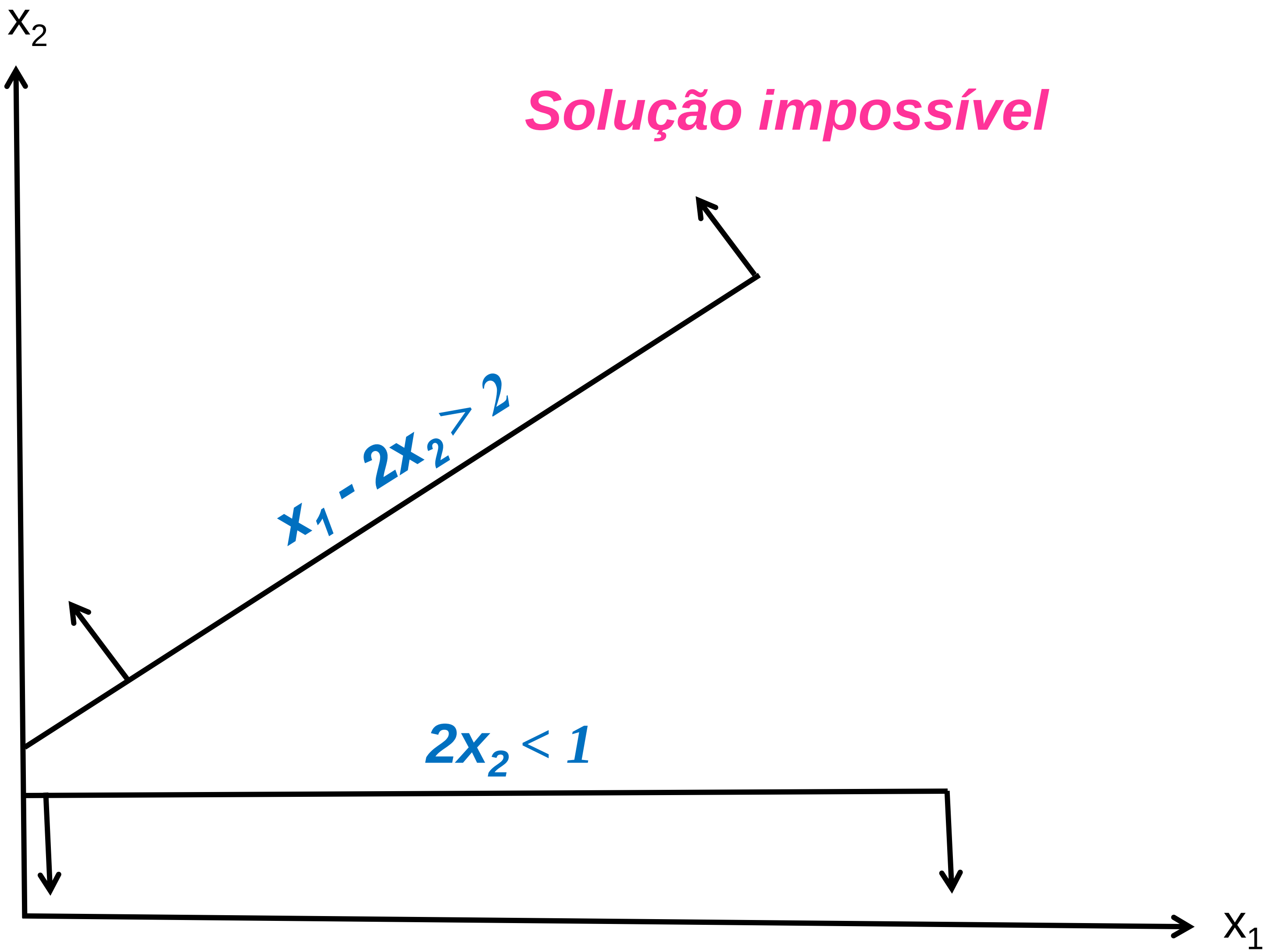


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
x_2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
X_1
Múltiplas
soluções de
Z = 18

Ainda, de acordo com Goldbarg e Luna (2000), podemos ter as seguintes situações:



O conjunto ***S*** é vazio, isto é, não existe nenhuma solução viável.



FIM DO CAPITULO III b